جلسه چهارم

1:09 PM Monday, February 26, 2018

فضای برد ماتریس: فضایی که توسط تمام ترکیب های خطی ممکن ستون های A تولید می شود

Range Space

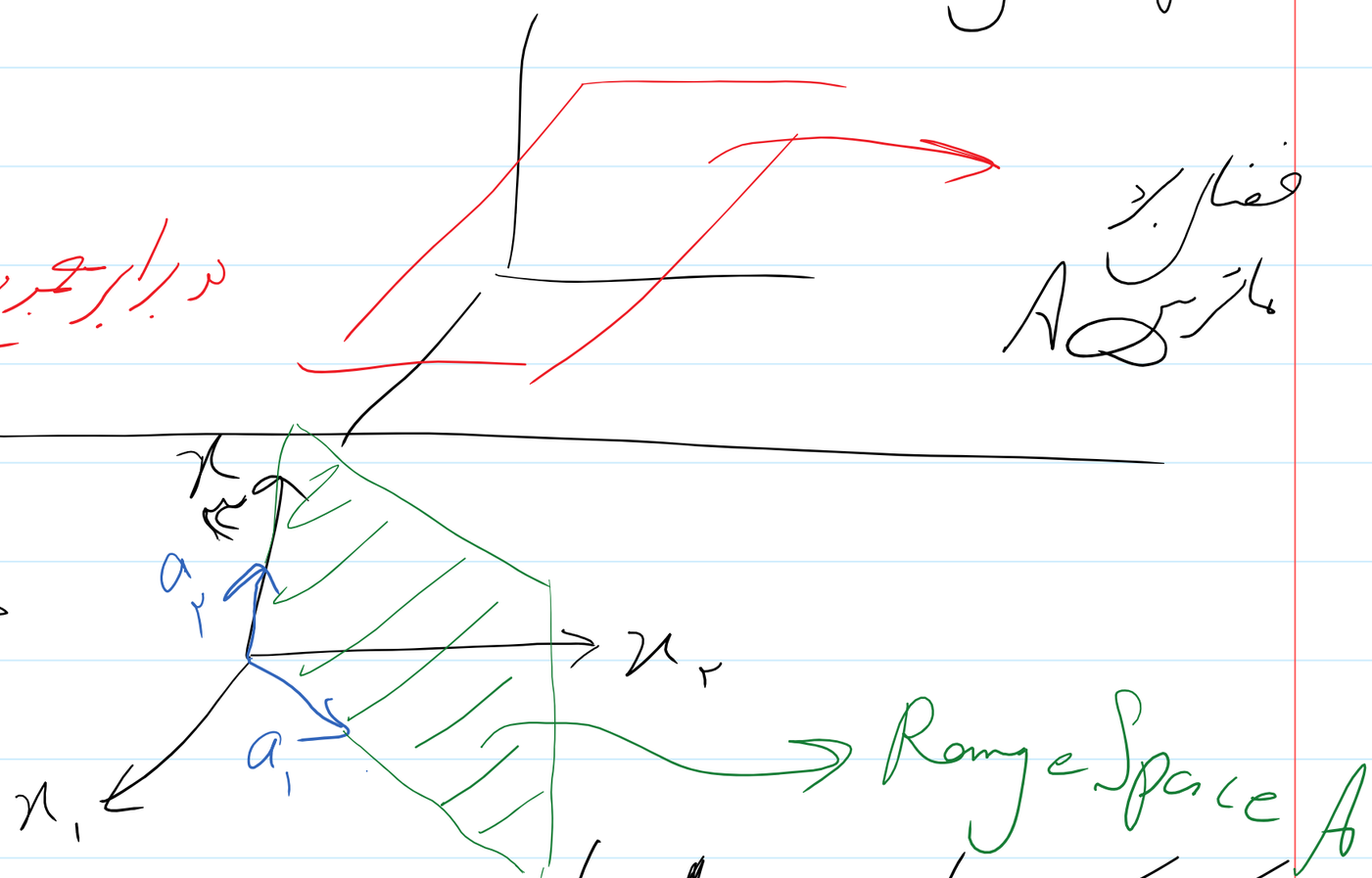
$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 4 & 10\\ 4 & 8 & 14\end{bmatrix}$$

دو برابر ستون اول است ← و ۶ ۶

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ 4 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

a_1 a_2 a_3

$\rho(A)$ یا $Rank(A)$ ← تعداد ستون های مستقل A



رنک یک ماتریس برابر با بعد فضای برد ماتریس است

$[A]_{m\times n}$ $m>n$ $\left[A\right]_{m\times n}$ مستطیلی/ساده

$P(A)\leq n$

$m<n$ $[A]_{m\times n}$ مستطیلی خوابیده $\longrightarrow$ $P(A)$ ؟؟ $\leq m$

اگر n بردار مستقل خطی داشته باشیم، فضای تولید شده توسط آنها می‌تواند بزرگترین R^n باشد.

اگر بردارهای مستقل خطی $m\times 1$ باشند، فضای تولید شده توسط آنها می‌تواند بزرگترین R^m باشد!

$x_1, x_2, x_3 \in R^3$ $\longrightarrow$ فضای تولید کننده، در بزرگترین حالت R^3 است

لذا همگی می‌توانند مستقل باشند

x_1, x_2, x_3 ی‌توانند

اگر هر سه بردار مستقل باشند، فضای تولید شده R^3 است.

$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\end{bmatrix}$ $\leftarrow$ R^1 است

$$A_{m\times n}x = y \quad (y: m\times 1)$$

$$\rho(A) \leq \min(m,n)$$

سوال: چه زمانی برای تمامی y های ممکن، جوابی برای x در معادله بالا وجود دارد؟

یعنی فضای R^m

حقیقی y های ممکن در فضای برد A قرار بگیرند.

$\rho(A) \geq m$ یعنی باشد

جواب: باید $\rho(A)=m$ باشد تا برای تمامی y های ممکن جوابی برای x داشته باشیم.

یعنی حداقل یک سطر A کامل باشد.

$$\begin{bmatrix} & A & \end{bmatrix}_{3\times 4}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} y \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

اگر $\rho(A)=2$ → برای تمامی y ها جواب نداریم (برای بعضی y ها جواب داریم)

۱	۲	۳	−۱
۲	۴	۵	−۱
۳	۶	۷	−۱

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 7 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 4}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ 18+3 \end{bmatrix}$$

هر بردار y هر فضای برد A قرار نگیرد.

کمترین تعداد صفر

درمورد وجود جواب، آیا جواب یکتا است؟

$Ax=0$ همواره جواب $x=0$ دارد

متقابل صدق کند، بردار پوچی ماتریس است.

null vector

فضای تولید شده توسط null space: فضای پوچی

تمامی ترکیب های خطی

ممکن بردارهای پوچی ماتریس

nullity: بعد فضای پوچی

ماتریس به تعداد بردارهای تهی ماتریس

یا $N(\cdot)$ نشان می دهیم

(پوچی = ستون های وابسته ریاضی)

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&5&8&-1\\3&6&7&-1\end{bmatrix}$$

$$Ax=0 \longrightarrow \begin{bmatrix}1&2&3&-1\\2&5&8&-1\\3&6&7&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

از ترکیب وابستگی ستون های ماتریس استفاده می کنیم

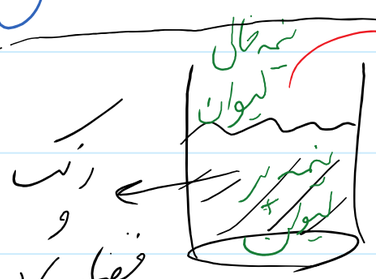
$$n_1=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\ n_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix} \longrightarrow N(A)=2$$

بردارهای پوچی

فضای پوچی ماتریس ← $\alpha_1\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{bmatrix}$

فضای R^2 در فضای R^4

برای تمامی α_1 و α_2 های ممکن



رنک و فضای برد

Nulling و Nullspace

$\rho(A)+N(A)=n$

تعداد ستون ها — تعداد ستون ها — تعداد وابسته ها

$\forall x \in \text{Null space}(A) \longrightarrow Ax = 0$

$x = \alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2$

$\exists \alpha_1, \alpha_2$ $\longrightarrow A(\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2) = \alpha_1 A n_1 + \alpha_2 A n_2 = 0$

خروجی جواب (در صورت وجود جواب):

جواب کلی = فضای پوچی + یک جواب خصوصی

$Ax = y$ ✓ ؟

x_p جواب خصوصی که در معادله صدق کند

$Ax_p = y$

$x = x_p + \sum_i \alpha_i n_i \quad \forall \alpha_i$ $\xrightarrow{\text{در}}$ $Ax = A(x_p + \sum \alpha_i n_i) = Ax_p + A(\sum \alpha_i n_i) = y$ ($A(\sum \alpha_i n_i) = 0$)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 8 & -1 \\ 3 & 4 & 7 & -1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$x_p = ?$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\longrightarrow$ ترکیب خطی از ستون‌های A برابر y شود.

$$n_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

فرم کلی جواب $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall \alpha_1, \alpha_2$

چه زمان جواب یکتاست؟ وقتی که فضای پوچ نداشته باشیم در صورت وجود جواب، جواب یکتا است

وقتی فضای پوچ نداریم که $\rho(A_{m\times n}) = n$

برای ماتریس های مربعی $A_{n\times n}$، بسته به درایه‌های A، این امکان وجود دارد که $\rho(A)=n$

برای ماتریس های مستطیلی ایستاده ($m>n$)، — — — — $\rho(A)=n$ باشد.

برای ماتریس های مستطیلی خوابیده ($m<n$)، امکان ندارد که $\rho(A)=n$ باشد.

حتماً بردار تهی دارد

در صورت وجود جواب، نرم کمینه جواب مسئله - آنچه گفته شد را دارد

وقتی که در فضای سطری A باشد.