جلسه ششم

$[A]_{4\times4}$

$\lambda = \lambda_1$ یک مقدار ویژه‌ی حقیقی

$N(A-\lambda_1 I)=3$

$\exists V_1, V_2, V_3 \neq 0$

$(A-\lambda_1 I)V_1 = 0$

$(A-\lambda_1 I)V_2 = 0$

$(A-\lambda_1 I)V_3 = 0$

$Q=[V_1\ V_2\ V_3\ (?)]$

$\exists V_4 \neq 0 \quad (A-\lambda_1 I)V_4 = V_3$

$$\begin{cases} AV_1=\lambda_1 V_1 \\ AV_2=\lambda_1 V_2 \\ AV_3=\lambda_1 V_3 \\ AV_4=V_3+\lambda_1 V_4 \end{cases} \longrightarrow A\underbrace{[V_1\ V_2\ V_3\ V_4]}_{Q} = \underbrace{[V_1\ V_2\ V_3\ V_4]}_{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ۳ بلوک جردن

$\exists V_1, V_2, V_3, V_4 \neq 0$

$$\begin{cases} (A-\lambda_1 I)V_1=0 \\ (A-\lambda_1 I)V_2=0 \\ (A-\lambda_1 I)V_3=0 \\ (A-\lambda_1 I)V_4=0 \end{cases}$$

$\leftarrow N(A-\lambda_1 I)=4$

$$\begin{cases} AV_1=\lambda_1 V_1 \\ AV_2=\lambda_1 V_2 \\ AV_3=\lambda_1 V_3 \\ AV_4=\lambda_1 V_4 \end{cases} \Rightarrow A\underbrace{[V_1\ V_2\ V_3\ V_4]}_{Q} = \underbrace{[V_1\ V_2\ V_3\ V_4]}_{Q} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ ۴ بلوک جردن

تعداد بلوک‌های جردن مربوط به ماتریس قطری با $N(A-\lambda I)$ مساوی با باشد.

مثال:

$$[A]_{V\times V} \longrightarrow \lambda = \begin{cases} +2 & \text{سه تا} \\ -2 & \text{سه تا} \\ +3 & \text{سه تا} \\ -1 & \text{سه تا} \end{cases}$$

سه تا کمترین مرتبه ۱

سه تا کمترین مرتبه ۲

$J = ?$ $\Longleftarrow$ $N(A+I) = 2$ ، $N(A+2I) = 1$

تعداد بلوک جردن مربوط به $\lambda=-2$ یک است.

تعداد بلوک جردن مربوط به $\lambda=-1$ دو است

$$J = \begin{bmatrix} [2] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-2 & 1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [-2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [+3] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [-1 & 1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [-1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [-1] \end{bmatrix}$$

بلوک‌های جردن

۳) حالی که مقادیر ویژه‌ی A مختلط و غیرتکراری:

$AQ=Q\bar{A}$ ⟶ ماتریس $\bar{A}$ ؟؟

بردار ویژه:

$[A]_{2\times 2}$ ⟶ $\lambda=\alpha\pm j\beta$

$AV=(\alpha+j\beta)V$ ⟶ V متناظر مختلط است

V حقیقی ⟵ بردار ویژه‌ی حقیقی بگیریم

V حقیقی = λ مختلط ✗

$V=\underset{n\times 1}{U}+j\underset{n\times 1}{W}$

U: قسمت حقیقی V ، W: قسمت موهومی V

$A(U+jW)=(\alpha+j\beta)(U+jW)$ ⟶ $\begin{cases}AU=\alpha U-\beta W\\ AW=\alpha W+\beta U\end{cases}$

$[AU\ \ AW]=[\alpha U-\beta W\ \ \alpha W+\beta U]$ ⟶ $A\underbrace{[U\ W]}_{Q}=\underbrace{[U\ W]}_{Q}\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$

ماتریس $\bar{A}$ ؟

$[A]_{4\times 4}$ ⟶ $\lambda=\begin{cases}2\pm 3j\\ 4\pm 5j\end{cases}$ ⟶ $J=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & -5 & 4\end{bmatrix}$

(۴) مقادیر ویژه ماتریس حقیقی A حتماً مختلط مزدوج باشند.

$[A]_{4\times 4}$ یک ماتریس حقیقی

$\lambda = \begin{cases} \alpha+j\beta \\ \alpha-j\beta \\ \alpha+j\beta \\ \alpha-j\beta \end{cases}$

$\alpha \pm j\beta$ یک ریشه مختلط مزدوج است.

$Q = [u_1 \; w_1 \; ? \; ?]$

$AV_1 = (\alpha+j\beta)V_1 \longrightarrow V_1 = u_1 + jw_1$

اگر $\nu(A-(\alpha+j\beta)I) = 2$ ←

یعنی دو بردار مختلط مستقل خطی وجود دارد که $A-(\alpha+j\beta)I$ را خراب می‌کنند.

$\exists V_1, V_2 \neq 0 \quad (A-(\alpha+j\beta)I)V_1 = 0$

$(A-(\alpha+j\beta)I)V_2 = 0$

$V_1 = u_1 + jw_1$

$V_2 = u_2 + jw_2$

$A(u_1+jw_1) = (\alpha+j\beta)(u_1+jw_1)$

$A(u_2+jw_2) = (\alpha+j\beta)(u_2+jw_2)$

$$\begin{cases} Au_1 = \alpha u_1 - \beta w_1 \\ Aw_1 = \alpha w_1 + \beta u_1 \\ Au_2 = \alpha u_2 - \beta w_2 \\ Aw_2 = \alpha w_2 + \beta u_2 \end{cases} \longrightarrow A[\underbrace{u_1 \; w_1 \; u_2 \; w_2}_{Q}] = [\underbrace{u_1 \; w_1 \; u_2 \; w_2}_{Q}] \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

بجای قبل (۱) $\leftarrow [A]_{2\times 2}$ $\quad \lambda=\lambda_0$ ، حقیقی مکرر $\quad \nu(A-\lambda_0 I)=2$ هماکیه نیستم

$J=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 0\\ 0 & \lambda_0\end{bmatrix}$

(به شکل $J=\begin{bmatrix}\alpha & \beta & 0 & 0\\ -\beta & \alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & -\beta & \alpha\end{bmatrix}$)

(کلیه بردارهای مقابل ریشه حقیقی داشتیم (وقتی هندسه ریشه ها مختلط مزدوج می شوند) ، ۱×۱ ها برشکسته و ۲×۲ می شوند)

$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix} \leftarrow \lambda_0$ (۱×۱)

$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \leftarrow I$ (۱×۱)

لذا بلوک بزرگ

اگر $\nu(A-(\alpha+j\beta)I)=1$ باشد.

$\exists V_1\neq 0 \quad (A-(\alpha+j\beta)I)V_1=0$ (بردار ویژه)

$V_1=u_1+jw_1$

$Q=[u_1 \; w_1 \; ? \; ?]$

$\exists V_2 \neq 0 \quad (A-(\alpha+j\beta)I)V_2=V_1 \qquad V_2=u_2+jw_2$

$$\begin{cases} AV_1=(\alpha+j\beta)V_1 \\ AV_2=V_1+(\alpha+j\beta)V_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A(u_1+jw_1)=(\alpha+j\beta)(u_1+jw_1) \\ A(u_2+jw_2)=(u_1+jw_1)+(\alpha+j\beta)(u_2+jw_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Au_1 = \alpha u_1 - \beta w_1 \\ Aw_1 = \alpha w_1 + \beta u_1 \\ Au_2 = u_1 + \alpha u_2 - \beta w_2 \\ Aw_2 = w_1 + \alpha w_2 + \beta u_2 \end{cases} \longrightarrow A\underbrace{[u_1\ w_1\ u_2\ w_2]}_{Q} = \underbrace{[u_1\ w_1\ u_2\ w_2]}_{Q}\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$?

بعضی از ماتریس‌ها $[A]_{2\times 2}$ سکسی‌لیزر تبدیل $\lambda = \lambda_0$ و $N(A-\lambda_0 I) = 1$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$