Sunday, March 11, 2018 2:09 PM

$AQ = Q\bar{A}$ $\quad A = Q\bar{A}Q^{-1}$ $\quad \det(A) = \det(Q\bar{A}Q^{-1})$

$= \det(Q)\det(\bar{A})\det(Q^{-1})$

$= \det(Q)\det(Q^{-1})\det(\bar{A})$

$\det(A) = \det(\bar{A})$

اگر $\bar{A}$ مثلثی باشد، دترمینان ماتریس بالامثلثی است (که یک حالت خاص از حالت کلی است)

وقتی که ماتریس مورد نظر ما $\bar{A}$ بالامثلثی است.

$\bar{A}$ متقارن $\longrightarrow$ $\det(\bar{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

اگر ماتریس ما حقیقی باشد، ریشه‌های مختلط به صورت مزدوج ظاهر می‌شوند.

$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

$(\alpha + j\beta)(\alpha - j\beta) = \alpha^2 + \beta$

$\det(\bar{A}) = (\alpha^2 + \beta) \times 2$ $\Longleftarrow$ $\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\Longleftarrow$ اگر ماتریس ما متقارن باشد، مقادیر ویژه حقیقی هم خواهد بود.

Sunday, March 11, 2018 2:09 PM

$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ دترمینان هر ماتریس حقیقی یا مختلط که مقادیر ویژه‌ی A هستند

---

nilpotent.

مثلاً ← $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$J - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(J-\lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $(J-\lambda I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ، $(J-\lambda I)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$k \geq 4$

$(J - \lambda I)^{\text{بلندترین مرتبه‌ی جزء}} = 0$

بلندترین مرتبه‌ی جزء ژردنی

توابع ماتریسی از مرتبه‌ی دوم:

آگر ← $f(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 10$

$f(A) = A^2 + 2A + 10I$

تعریف

$A^0 = I$

$A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ مرتبه}}$

Sunday, March 11, 2018 2:09 PM

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$ صریحی

صریحی

$$A^k=\begin{bmatrix} A_1^{\,k} & 0 \\ 0 & A_2^{\,k} \end{bmatrix}$$

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(A_1) & 0 \\ 0 & f(A_2) \end{bmatrix}$$

$f(A_1)$ $f(A_2)$

$$f(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1_0 \longrightarrow f(A)=A^2+2A+1_0 I = \begin{bmatrix} A_1^2+2A_1+1_0 & 0 \\ 0 & A_2^2+2A_2+1_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2A_1 & 0 \\ 0 & 2A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1_0 & \\ & 1_0 \end{bmatrix}$$

$$AQ=Q\bar{A} \qquad A=Q\bar{A}Q^{-1} \longrightarrow f(A)=Qf(\bar{A})Q^{-1}$$

$$A^k=Q\bar{A}Q^{-1}\times Q\bar{A}Q^{-1}\times\cdots\times Q\bar{A}Q^{-1}=Q\bar{A}^kQ^{-1}$$

$$\alpha A^k=Q\alpha\bar{A}^kQ^{-1}$$

$$A^{k_1}+A^{k_2}=Q\bar{A}^{k_1}Q^{-1}+Q\bar{A}^{k_2}Q^{-1}=Q(\bar{A}^{k_1}+\bar{A}^{k_2})Q^{-1}$$

این Q!

Sunday, March 11, 2018 2:09 PM

چند جمله‌ای مشخصه: چند جمله‌ای که ریشه‌های مقادیر ویژه ماتریس است.

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$$

$$\Delta(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$ ← n_i: مرتبه تکرار مقدار ویژه λ_i

$$A \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 & \text{مرتبه تکرار} \\ \lambda = 2 & \text{یک بار} \\ \lambda = 4 & \text{یک بار} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \Delta(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2)(\lambda-4)$$

چند جمله‌ای مینیمال

به ازای $\lambda = 1$: $N(A-I) = 2$ ← بازش

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & [1] & & \\ & & & [2] & \\ 0 & & & & [4] \end{bmatrix}$$

$$\psi(\lambda) = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\bar{n}_i}$$

$\bar{n}_i$: بزرگترین مرتبه بلوک جردن مربوط به λ_i

$$\bar{n}_i \le n_i$$

$$\psi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-4) = (\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda^2-6\lambda+8) = \lambda^4 - 8\lambda^3 + 21\lambda^2 - 22\lambda + 8$$

هر ماتریسی در چند جمله‌ای مینیمال خودش صدق می‌کند $\psi(A) = 0$

یعنی حاصل زیر به ماتریس با n سطر و ستون صفر منجر می‌شود

$$A^4 - 8A^3 + 21A^2 - 22A + 8I = 0$$

۲۲۲ ۱/۲ ۴

$\psi(A) = 0$ ← n is patent ~ b is

Sunday, March 11, 2018 2:09 PM

مثلاً ماتریس A

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 2 & \\ 0 & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$\psi(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda-4)$$

$$\psi(A) = Q\,\psi(\bar{A})\,Q^{-1} \longrightarrow \psi(\bar{A}) = 0$$

$$\psi(\bar{A}) = (\bar{A}-I)^2(\bar{A}-2I)(\bar{A}-4I)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & 2-1 & & \\ & & & 4-1 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix}^2 \quad \begin{bmatrix} 1-2 & 1 & & & \\ 0 & 1-2 & 0 & & \\ & 0 & 1-2 & & \\ & & & 4-2 & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1-4 & 1 & 0 & & \\ 0 & 1-4 & 0 & & \\ & 0 & 1-4 & & \\ & & & 2-4 & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [0] & & & \\ & 0 & & \\ & & (2-1)^2 & \\ 0 & & & (4-1)^2 \end{bmatrix}$$

nilpotent دلیل = $[0]^2$ قطعاً صفر است

به‌ازای ماتریس موجود در $\psi(\bar{A})$ بلوک‌هایی به‌قطر اصلی است که هرکدام از این بلوک‌ها قطعاً به یک بلوک صفر ختم می‌شوند

$$\Rightarrow \psi(\bar{A}) = 0 \quad \Rightarrow \psi(A) = 0$$

پس هر ماتریسی به‌ازای چند جمله‌ای مشخصه‌اش صفر می‌شود یعنی $\psi(A) = 0$ چون $\psi(A) = 0 \Rightarrow \Delta(A) = 0$

Cayley-Hamilton (قضیه کیلی همیلتون)

ماتریس A ← $\Delta(\lambda)=0$ ← $\Delta(A)=0$ ← قرار می‌دهیم

$A_{n\times n}: \longrightarrow \Delta(\lambda)=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\alpha_2\lambda^{n-2}+\dots+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n$

$A^n+\alpha_1A^{n-1}+\dots+\alpha_{n-1}A+\alpha_nI=0 \longrightarrow A^n=-\alpha_1A^{n-1}-\dots-\alpha_{n-1}A-\alpha_nI$

یعنی A^n برحسب ترکیب خطی از $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ قابل بیان است

طرفین را در A ضرب می‌کنیم

$A^{n+1}=-\alpha_1A^n-\dots-\alpha_{n-1}A^2-\alpha_nA$

A^n برحسب $\{I, A, \dots A^{n-1}\}$ قابل بیان است

$\Longrightarrow$ A^{n+1} هم برحسب ترکیب خطی $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ قابل بیان است

با تغییر جهت (کلی تر) می‌توان گفت $A^{n+2}, A^{n+3}, \dots$ همگی برحسب ترکیب خطی $\{I, A, A^2, \dots, A^{n-1}\}$ قابل بیان هستند

$\Leftarrow$ اگر $f(A)$ چندجمله‌ای از درجه دلخواه باشد، برحسب ترکیب خطی $\{I, A, \dots, A^{n-1}\}$ قابل بیان است

$f(A)=\beta_0I+\beta_1A+\beta_2A^2+\dots+\beta_{n-1}A^{n-1} \longrightarrow \beta_i=???$

آی $f(\lambda)$ چند جمله‌ای از مرتبه کمتر از n باشد:

$$f(\lambda) = \Delta(\lambda) q(\lambda) + h(\lambda)$$

$f(\lambda)$ ÷ $\Delta(\lambda)$ → خارج قسمت از مرتبه n

$q(\lambda)$

$h(\lambda)$ → از مرتبه حداکثر $n-1$

$$f(\lambda_i) = \underbrace{\Delta(\lambda_i)}_{=0} q(\lambda_i) + h(\lambda_i) \Longrightarrow f(\lambda_i) = h(\lambda_i)$$

λ_i مقادیر ویژه

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \cdots + \beta_{n-1} \lambda^{n-1}$$

(β_i ها مجهولاتی هستند)

$$\begin{cases} \beta_0 + \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_1^2 + \cdots + \beta_{n-1} \lambda_1^{n-1} = f(\lambda_1) \\ \beta_0 + \beta_1 \lambda_2 + \beta_2 \lambda_2^2 + \cdots + \beta_{n-1} \lambda_2^{n-1} = f(\lambda_2) \\ \vdots \\ \beta_0 + \beta_1 \lambda_n + \beta_2 \lambda_n^2 + \cdots + \beta_{n-1} \lambda_n^{n-1} = f(\lambda_n) \end{cases}$$

→ n معادله n مجهول

آی مقادیر ویژه λ_i همگی حقیقی و غیر تکراری باشند، n معادله n مجهول بوجود می‌آید.

آی مقادیر ویژه حقیقی، تکراری باشند ← در بدست آوردن معادلات تکراری نیز باید دقت کنیم

آی λ ریشه تکراری از مرتبه k ام باشد، ریشه‌های $\Delta(\lambda)=0$ ، $\Delت'(\lambda)$ ، ... ، $\Delت^{(k-1)}(\lambda)$ نیز می‌باشد.

بعضی معادلات لازم

$$f(\lambda) = \Delta(\lambda)\, q(\lambda) + h(\lambda)$$

λ_1 یک ریشه‌ی k تایی $\Delta(\lambda)$ باشد.

$$\Delta(\lambda_1) = 0 \quad \Delta'(\lambda_1) = 0 \quad \cdots \quad \Delta^{(k-1)}(\lambda_1) = 0$$

$$f(\lambda_1) = h(\lambda_1)$$

$$f'(\lambda) = \Delta'(\lambda) q(\lambda) + \Delta(\lambda) q'(\lambda) + h'(\lambda)$$

$$f'(\lambda_1) = \underbrace{\Delta'(\lambda_1)}_{=0} q(\lambda_1) + \underbrace{\Delta(\lambda_1)}_{=0} q'(\lambda_1) + h'(\lambda_1) \Rightarrow \boxed{f'(\lambda_1) = h'(\lambda_1)}$$

همان حالت بسیار بسیار نزدیک حالت تکراری می‌شود

n حالت مستقل داریم β_i ها به صورت تابعی از λ_i ها به دست می‌آیند.

$$f(A) = \Delta(A) q(A) + h(A) \Rightarrow f(A) = h(A)$$

$\Delta(A) = 0$

$f(A)$: چندجمله‌ای از درجه نامعلوم

$h(A)$: چندجمله‌ای از درجه $n-1$

از آنجایی که توابع غیر چندجمله‌ای را توسط بسط مک لورن می‌توان به صورت توابع چندجمله‌ای از درجه ∞ نشان داد، پس توابع غیر چندجمله‌ای $f(A)$ را می‌توان توسط $f(A) = h(A)$ حساب کرد.