جلسه دهم:

روش لاگرانژی در حل مسائل سیستم های دینامیکی

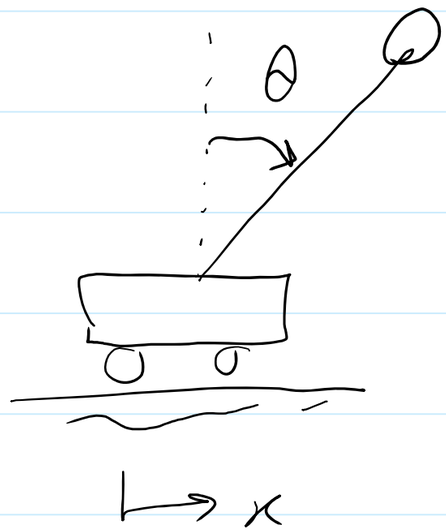
درجه آزادی: متغیر به مستقل کمترین درجات آزادی می گوئیم مقدار داشته باشند تا حالت دینامیکی با حداکثر بودن مقادیر درجات آزادی، شکل سیستم مشخص شود.



یک درجه آزادی



دو درجه آزادی



سه درجه آزادی

$L = k - U$ → لاگرانژی سیستم

تابع کلی لاگرانژ

لاگرانژی جنبشی سیستم

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

نیروی تعمیم یافته

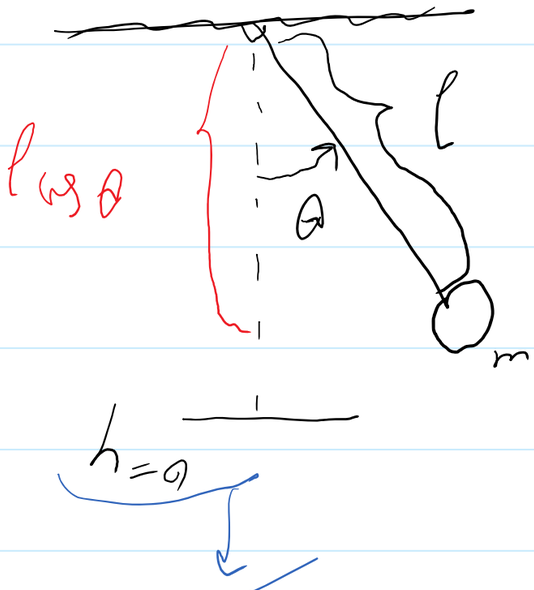
q_i : متغیر یا مختصات کلی

اگر q_i جابجایی خطی باشد ← Q_i نیروی خارجی موجود در راستای آن جابجایی.

" " زاویه‌ای " " ← گشتاور " " " " .

نکته: اینکه همانند بردارها، تعداد درجات آزادی با به بنویسیم.

مثال پاندول:



سطح مبنای انرژی پتانسیل را در $h=0$ مربوط به سطحی که توپ ثابت می‌ماند

انرژی جنبشی سیستم

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$

$$V=l\omega=l\dot{\theta}$$

$$K=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$U=mgh \qquad h=l-l\cos\theta$$

$$U=mgl(1-\cos\theta)$$

$$L=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2-mgl(1-\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

چون گشتاور خارجی اعمال نمی‌شود.

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta} \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}$$

$$ml^2\ddot{\theta}+mgl\sin\theta=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=-mgl\sin\theta$$

بنابراین

$$\boxed{\ddot{\theta}=-\frac{g\sin\theta}{l}}$$

12:10 PM Sunday, April 15, 2018

$x_1 \triangleq \theta$ $\quad x_2 \triangleq \dot{\theta}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{g}{\ell}\sin x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = f(x)$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

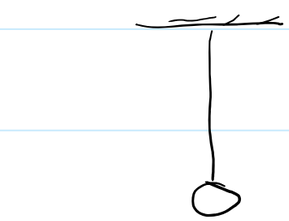
$f_1(x) = x_2$

$f_2(x) = -\dfrac{g}{\ell}\sin x_1$

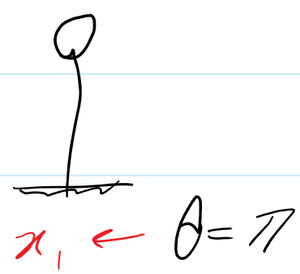
برای یک سیستم $\dot{x} = f(x)$ هر جایی که $f(x) = 0$ شود (یا باشد) $\dot{x} = 0$ شود نقطه تعادل نامیده می‌شود.

$f_1 = 0 \longrightarrow \boxed{x_2 = 0}$

$f_2 = 0 \longrightarrow \boxed{x_1 = k\pi}$ $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$



نقطه تعادل پایدار

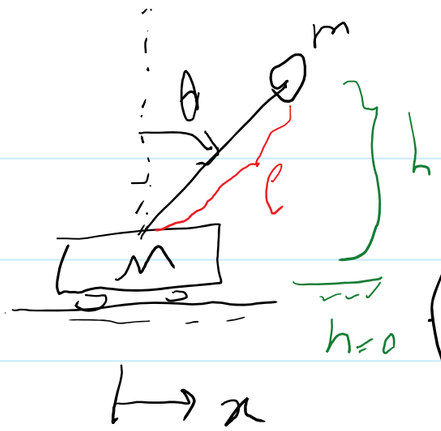


نقطه تعادل ناپایدار

هر نقطه تعادل $\sin$ است

اگر با جابجایی جزئی متغیرهای حالت در همسایگی، به نقطه تعادل برگردد، آن نقطه تعادل پایدار نامیده می‌شود.

مثال پاندول هلکوپتر



(فنر خیلی سفت شده هواپیما در حالت take off یا نشستن پاندول هلکوپتر است)

$$L = K - U \qquad K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + (?)$$

برای m :

$$V_m^2 = V_x^2 + V_y^2$$

$$V_x = \frac{d}{dt}\left(x + l \sin\theta\right)$$

$$V_y = \frac{d}{dt}\left(l \cos\theta\right)$$

$$K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m V_m^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt}\left(x + l \sin\theta\right)\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt}\left(l \cos\theta\right)\right)^2$$

$$U = mgh = mgl\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = u \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

فصل چهارم کتاب:

بررسی سیستم توصیف شده در فضای حالت و تحقق

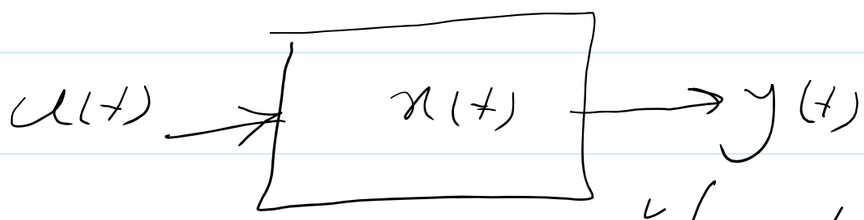
که به دست آوردن فضای حالت (A, B, C, D) آنرا میسر می‌کند

تابع تبدیل

LTI

$$\dot{x}_{(t)} = A x_{(t)} + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$



برای داشتن y، باید x را داشته باشیم.

برای بدست آوردن x، معادله حالت $\dot{x} = Ax + Bu$ را حل می‌کنیم.

$n\times 1 \quad n\times n \quad n\times 1 \quad n\times m \quad m\times 1$

$$e^{-At}\left(\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)\right) \longrightarrow e^{-At}\dot{x}(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}Bu(t)$$

$$e^{At}A = Ae^{At}$$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(e^{-At}x(t)\right)dt = \int_{t_0}^{t} e^{-At}Bu(t)\,dt$$

$$e^{-At}x(t)\Big|_{t=t_0}^{t=t} = \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x(t_0) =$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}e^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{At}e^{-A\tau}Bu(\tau)\,d\tau$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$$

$x(t)$ —

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$