جلسه هفدهم

$$x(k+1) = A_d x(k)$$

تعریف: پایداری داخلی و پایداری مجانبی مانند سیستم پیوسته $\dot{x} = Ax$ است

سیستم گسسته پایدار مجانبی است $\Leftrightarrow$ همه مقادیر ویژه ماتریس A_d داخل دایره واحد باشد

" " داخلی " $\Leftrightarrow$ " " " " " " یا

بر مرز باشند و آنهایی که بر مرز هستند ریشه‌های ساده

حداکثر بر مرز باشند.

قضیه پایداری لیاپانوف:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad [x]_{n\times 1}$$

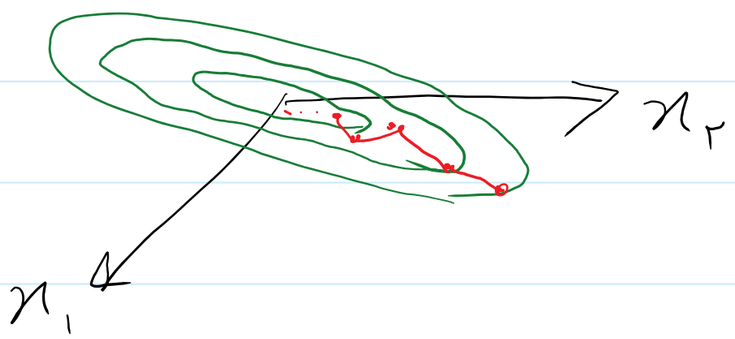
اگر تابع صفر از حالت حاصل بیش وجود داشته باشد که نزولی باشد $\Leftarrow$ بیش پایدار داخلی است.

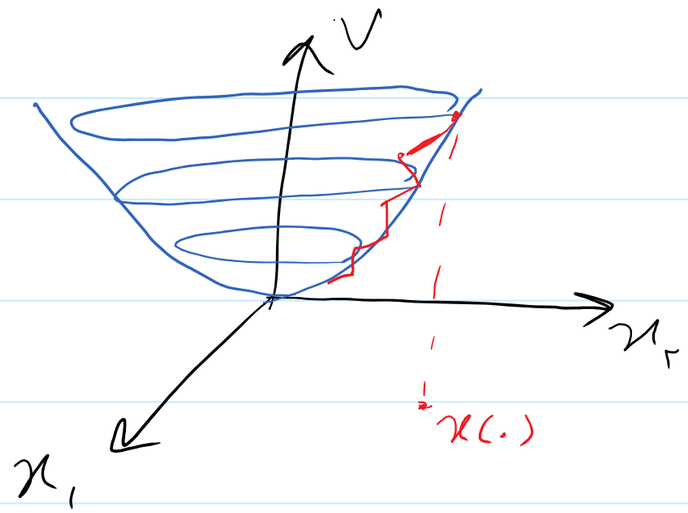
$$V(x(t)) > 0 \Leftarrow \forall x(t) \neq 0$$

$$V(x(t)) = 0 \Leftarrow x(t) = 0$$

بیش بررسی نزولی بودن $V(x(t))$ $\frac{d}{dt}$ بررسی می‌شود که باید منفی باشد.

$\dot{x}(t) = Ax(t)$ $\qquad V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$ $\qquad P^T = P > 0$ p.d





لازم $V<0$

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t)$$

$$= (Ax(t))^T P x(t) + x^T(t) P (Ax(t))$$

$$= x^T(t) A^T P x(t) + x^T(t) P A x(t)$$

$$= x^T(t) \left[A^T P + P A \right] x(t) = -x^T(t) Q x(t) < 0$$

$\forall x(t) \neq 0$

$Q^T = Q > 0$

آیا برای Q دلخواه باشد

$$A^T P + P A = -Q \qquad P^T = P > 0$$

$$Q^T = Q > 0$$

معادله لیاپانوف

قضیه لیاپانوف برای سیستم خطی: سیستم $\dot{x} = Ax$ پایدار مجانبی است $\Leftrightarrow$ برای هر $Q^T = Q > 0$ معادله لیاپانوف بالا، جواب ماتریس متقارن P دارد که مثبت معین باشد

(دقت شود که برای هر Q، اگر شما پیدا کنید که وجود نداشته باشد، لزوماً برای هر Q وجود ندارد.)

پایدار مجانبی

$$A^T P + P A = -Q \qquad \dot{x} = Ax$$

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

اگر $Q^T = Q > 0$ و P یک ماتریس پایدار باشد، جواب P یک ماتریس معین مثبت است.

ورژن گسسته قضیه پایداری لیاپانوف

$$x[k+1] = f(x[k])$$

$V(x[k]) > 0 \quad \leftarrow \quad x[k] \neq 0$

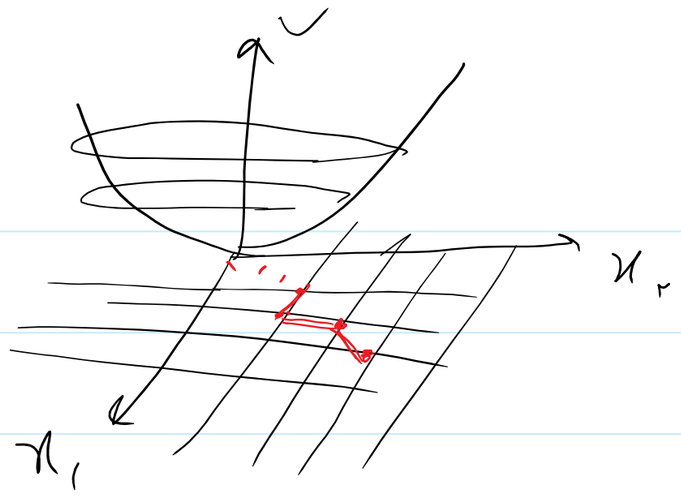
$V(x[k]) = 0 \quad \leftarrow \quad x[k] = 0$

(تابع لیاپانوف)

تابع $V(x[k+1]) - V(x[k])$ نزول کند.

Wednesday, May 9, 2018 8:06 AM

$$V(x[k]) = x[k]^T P\, x[k] \qquad P^T = P > 0$$



$$V(x[k+1]) = x[k+1]^T P\, x[k+1] = (A_d x[k])^T P\, (A_d x[k])$$

$$x[k+1] = A_d x[k]$$

$$= x^T[k] A_d^T P A_d x[k]$$

$$V(x[k+1]) - V(x[k]) = x^T[k] A_d^T P A_d x[k] - x^T[k] P x[k]$$

$$= x^T[k] \left(A_d^T P A_d - P \right) x[k] = -x^T[k] Q x[k] < 0$$

$-Q$ یک ماتریس

$$Q^T = Q > 0$$

$$A_d^T P A_d - P = -Q \qquad P^T = P > 0 \qquad Q^T = Q > 0$$

معادله لیاپانوف گسسته زمان

پایداری سیستم‌های LTV:

$g(t,\tau)$ پاسخ ضربه

تعاریف پایداری BIBO و داخلی همان قبلی‌ها هستند.

سیستم BIBO $\iff$ $\int_{t_0}^{\infty} |g(t,\tau)|\,d\tau < M$ محدود باشد

مثال: سیستم LTV داخلی پایدار است: مقادیر ویژه $A(t)$ به ازای هر t در نیم صفحه چپ باز باشند.

$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \longrightarrow x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$

$n\times 1 \quad n\times n \quad n\times 1$

سیستم داخلی پایدار است $\iff \|\Phi(t,t_0)\| < M$ باشد / پایداری مجانبی باید $\Phi(t,t_0) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

(از قبل می دانیم که تبدیل حالت $\bar{x}=Px$ حاصل پایه‌ای داخلی پایداری را تغییر نمی دهد.)

$\dot{x}=Ax$ پایدار است $\iff$ $\dot{\bar{x}}=\bar{A}\bar{x}$ پایدار است

$\bar{A}=PAP^{-1}$

برای سیستم خطی LTV $\dot{x}=A(t)x$ ماتریس $P(t)$ طوری باشد که $P(t)$، $\dot{P}(t)$ پیوسته باشند و $P(t)$، $P^{-1}(t)$، $\dot{P}^{-1}(t)$ محدود باشند (۷۸) و $P(t)$ معکوس پذیر باشد (۷۹) تبدیل حالت $\bar{x}=P(t)x$ پایداری داخلی را حفظ می کند.

در LTI: پایداری مجانبی $\iff$ پایداری BIBO

در LTV: لزوماً پایداری مجانبی پایداری BIBO را نتیجه نمی دهد.

پایداری مجانبی: $\Phi(t,t_0)\to 0$, $t\to\infty$

BIBO: $\int|g(t,\tau)|d\tau<M$

$$g(t,\tau) = C(t)\,\varphi(t,\tau)\,B(\tau) + D(t)\,\delta(t-\tau)$$

برای سادگی

$$\int_{t_0}^{t} \left| C(t)\,\varphi(t,\tau)\,B(\tau) \right| dt < M$$

$\forall t > t_0$

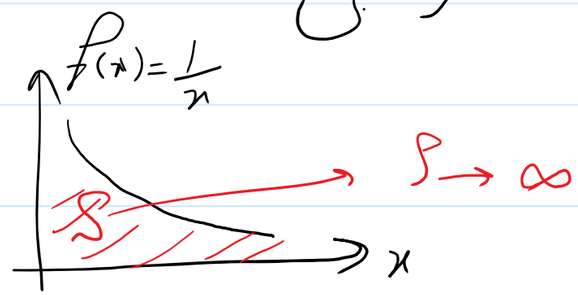
BIBO شرط لازم

$g(t,t_0) \longrightarrow 0$
$t \to \infty$
شرط پایداری مجانبی

لذا آنجایی که هر تابعی به ازای صفر شدن نه لزوماً مطلقاً انتگرال پذیر است

پایداری مجانبی $\not\Longleftarrow$ BIBO پایداری

لزوماً نتیجه نمی‌دهد



اگر $\varphi(t,t_0)$ به ازای صفر شدن $t \to \infty$ نه، $C(t)$، $B(t)$ محدود باشند $(\forall t)$

پایداری مجانبی $\Longleftarrow$ BIBO پایداری