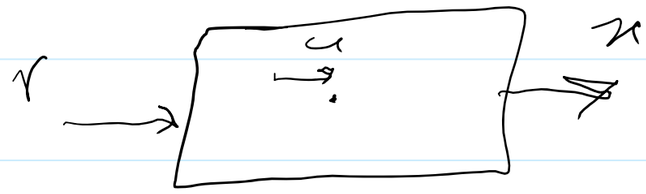
طراحی سیستم رسوگر:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$
$$u = -kx + r$$



$$\begin{cases} \dot{x} = (A - Bk)x + Br \\ y = Cx \end{cases}$$

تابع تبدیل حلقه بسته

(A, B) کنترل پذیر باشد ⟸ توسط ای نوع حاد بردار $A - BK$ را به نقاط دلخواه منتقل کرد.

$$\det(sI - A) = s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

ماتریس A حالت مختصه

(A, B) کنترل پذیر است

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A, B, C, D) \xrightarrow{P} (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{bmatrix}}_{\bar{C}} \bar{x}$$

$$u = -\underbrace{k}_{1\times n} x + r \quad (k = ?)$$

$$u = -\underbrace{k P^{-1}}_{\bar{k}} \bar{x} + r$$

$$u = -\bar{k}\bar{x} + r$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} & \bar{A} & \end{bmatrix} \bar{x} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 & \bar{k}_4 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - \bar{k}_1 & -\alpha_2 - \bar{k}_2 & -\alpha_3 - \bar{k}_3 & -\alpha_4 - \bar{k}_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$\boxed{\bar{x} = P x}$$

فرض کنیم با انتخاب k معادله دینامیکی حلقه بسته

$$\Delta_{cl}(s) = s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4$$

$-1, -2+j, -2-j, -4$

$$\Delta_{cl}(s) = (s+1)(s+2+j)(s+2-j)(s+4)$$

$$(s+2)^2 + 1$$

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \bar{k}_1 = -\bar{\alpha}_1 \\ -\alpha_2 - \bar{k}_2 = -\bar{\alpha}_2 \\ -\alpha_3 - \bar{k}_3 = -\bar{\alpha}_3 \\ -\alpha_4 - \bar{k}_4 = -\bar{\alpha}_4 \end{cases} \longrightarrow \bar{k} = [\cdots]$$

$$k = \bar{k} T^{-1}$$

$$k = \bar{k} T$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \alpha_1 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s + \alpha_4}$$

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$

$u = -kx + r$

صفرها جابجایی میکنند

$$\dot{x} = (A - Bk)x + Br$$
$$y = Cx$$

$$G(s) = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4}$$

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y\}}{\mathcal{L}\{r\}}$$

فیدبک حالت برای تولید صفرهای سیستم را بیابید.

پله‌ای بودن مرجع

فیدبک حالت

$$u = -kx + \rho r \longrightarrow \dot{x} = (A - Bk)x + B\rho r$$
$$y = Cx$$

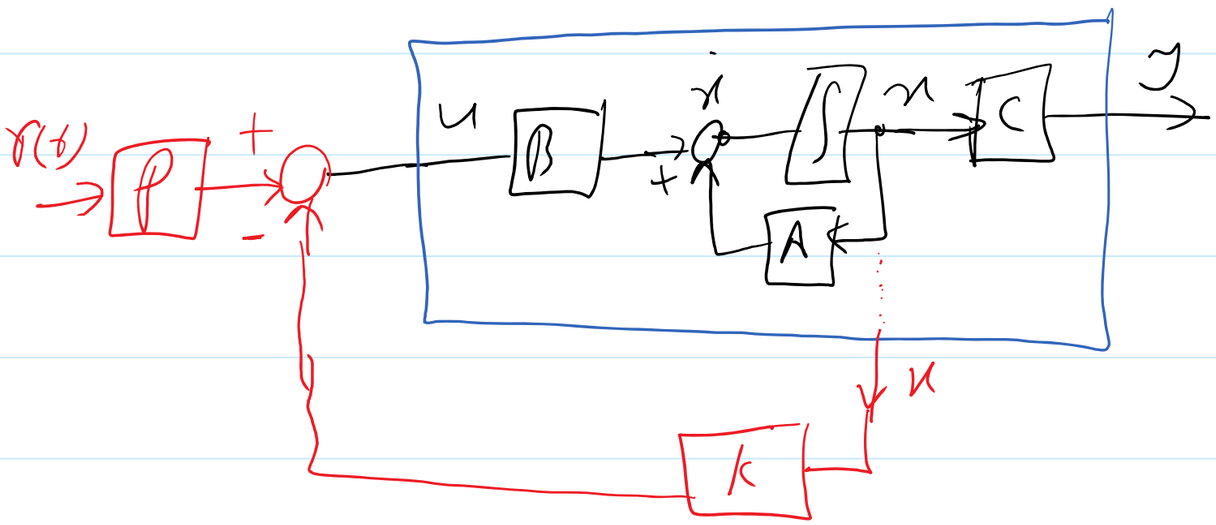
$r(t) = a\,1(t)$

$$y(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

$$y(\infty) = \rho \frac{\beta_4}{\alpha_4} a = \tilde{a}$$

$$\rho = \frac{\alpha_4}{\beta_4}$$

$\beta_4 \neq 0$

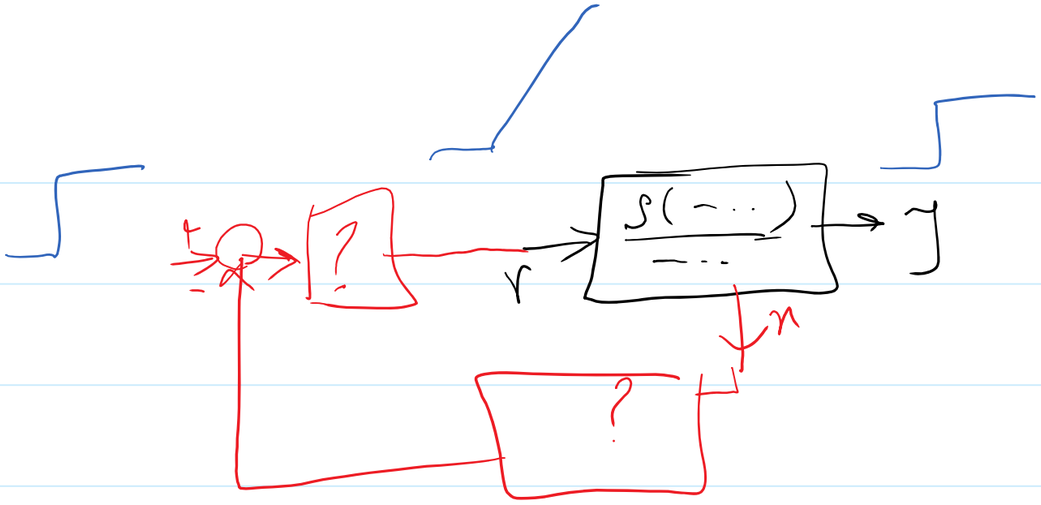


ردیابی:

$$G_{r\to y} = \rho \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^4 + \bar{\alpha}_1 s^3 + \bar{\alpha}_2 s^2 + \bar{\alpha}_3 s + \bar{\alpha}_4}$$

?

اگر سیستم صفر در مبدأ داشته باشد
می‌توان بدون آن ردیاب پله طراحی کرد.



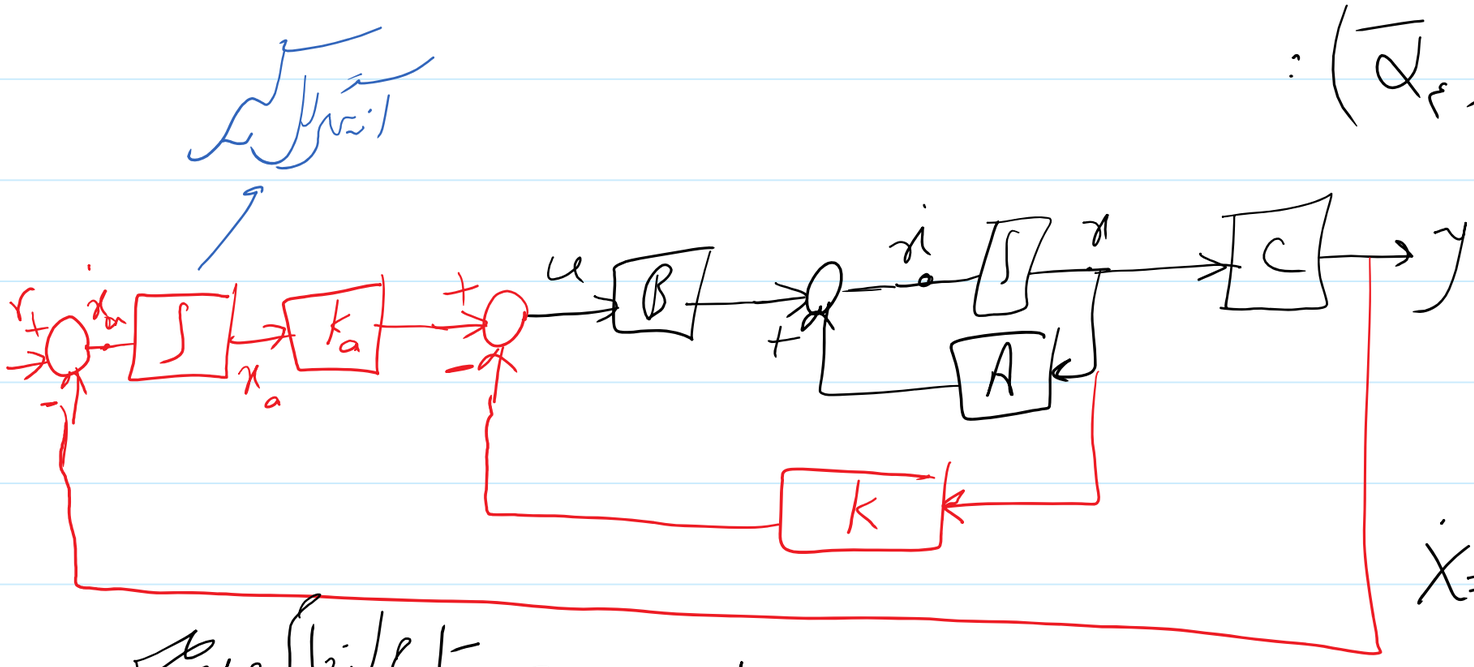
اگر بخواهیم ردیاب پله داشته باشیم سیستم ۲

به ورودی ramp نمی‌رود و پاسخی داخل

نمی‌دهد.

با تغییر پارامترها (α_4, β_4)، خطای دائمی خواهیم داشت

ردیابی مقادیر ممکن تغییرات (α_4, β_4):



$$\dot{x} = Ax + B(k_a x_a - kx)$$

$$\dot{x}_a = -cx + r$$

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} A - Bk & Bk_a \\ -c & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \qquad X \triangleq \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}$$

با طراحی k، k_a، مقادیر ویژه حلقه بسته به نقاط مطلوب منتقل می‌شوند و ردیابی پله به صورت مقادیر ایستاگی می‌شود.

$$\begin{bmatrix} A-Bk & Bka \\ -C & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & ka \end{bmatrix}$$

اگر $\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ کنترل پذیر باشد می‌توان $\begin{bmatrix} k & ka \end{bmatrix}$ را طوری کرد

ثابت می‌شود که اگر (A, B) کنترل پذیر باشد $\Leftarrow$ $\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$ کنترل پذیر است.

اگر (A, B) کنترل پذیر باشد:

$u = -kx + r$

$u = -kP^{-1}\bar{x} + r$

$\bar{k}$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_c \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$(\bar{A}_c, \bar{B}_c)$ کنترل پذیر است

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \bar{C}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \bar{x}$$

$u = -\bar{k}\bar{x} + r$

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{A}_c - \bar{B}_c\bar{k} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \bar{B}_c \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{C}_c & \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{\bar{c}} \Big] \bar{x}$$

قسمت جلو فقط می‌تواند مقادیر ویژه زیرسیستم کنترل پذیر $(\bar{A}_c)$ را جابجا کند

ثابت شود که مقادیر ویژه حاصل حاصله‌ست همان شامل مقادیر ویژه زیرسیستم کنترل ناپذیر $(\bar{A}_{\bar{c}})$ باشد.

پایه‌پذیری: اگر مقادیر ویژه مربوط به دینامیک کنترل ناپذیر ($\bar{A}_{\bar{c}}$) سمت چپ باشند،
سیستم پایه‌پذیر نامیده می‌شود.

اگر مقادیر ویژه سیستم کنترل ناپذیر سمت راست باشد چه‌کار کنیم؟ با فیدبک حالت u قطبی می‌شود سیستم را پایه‌پذیر کرد.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

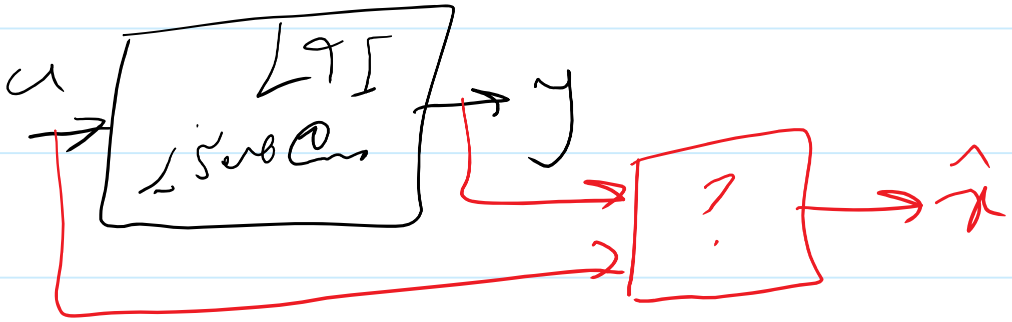
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \left(sI - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{(s+1)(s-1)}$$

$s = -1$

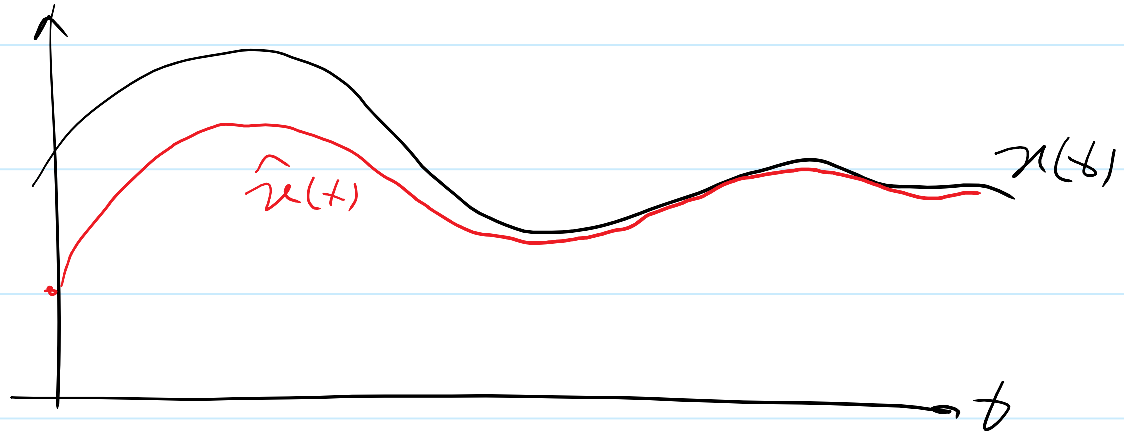
$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_0 \end{bmatrix} \bar{x}$$

تخمین حالت:



$\forall\ x(0),\ \hat{x}(0),\ u(t) \xrightarrow{\text{باید}} \lim_{t\to\infty} x(t) - \hat{x}(t) = 0$



$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu$$

ساختار تخمین

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$\dot{e}(t) = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - (A\hat{x} + Bu)$$
$$= Ax - A\hat{x} = A(x - \hat{x})$$

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{e}(t) = Ae(t)}$$ دینامیک خطای تخمین

اگر دینامیک سیستم پایدار باشد ($\lambda(A)$ سمت چپ) $\Longleftarrow$ $e(t)$ به سمت صفر میل می‌کند.

~ ~ ~ ~ ناپایدار باشد (نباشد ~ ~ ~) $\Longleftarrow$ ~ ~ ~ نمی‌کند.