سیستم مکانیکی

- در سیستم های مکانیکی دورانی نیز المان های اصلی فنر پیچشی، دمپر دورانی و اینرسی دورانی می باشند.

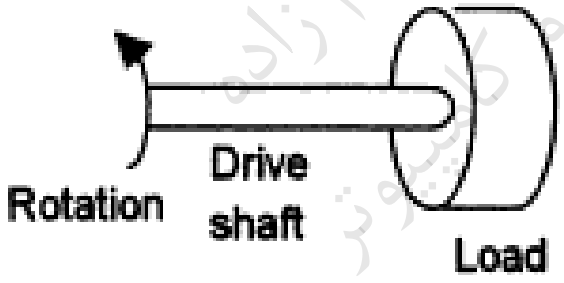
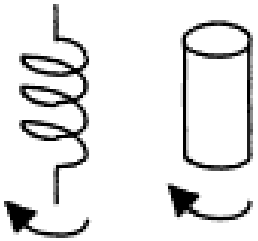


Figure 8.10 *Drive shaft*

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز
فرزاد هاشم زاده

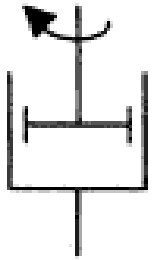
سیستم مکانیکی

- فنر پیچشی: جابجایی زاویه ای متناسب با گشتاور اعمالی می باشد.



$$T = k\theta$$

- دمپر پیچشی: سرعت زاویه ای متناسب با گشتاور اعمالی می باشد.
(دوران یک دیسک در داخل سیال)



$$T = c\omega = c\frac{d\theta}{dt}$$

- اینرسی دورانی: شتاب زاویه ای متناسب با گشتاور اعمالی می باشد.

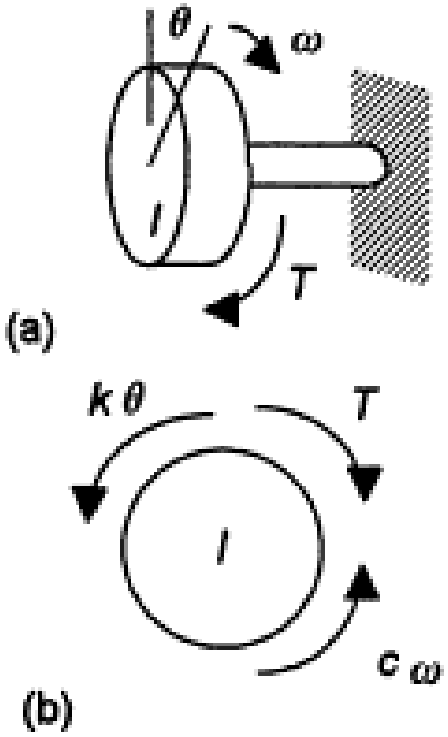


$$T = Ia = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز
فرزاد هاشم زاده

سیستم مکانیکی

مثال



$$T - k\theta - c\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T$$

دانشکده مهندسی مکانیک و کامپیوتر دانشگاه تبریز
فرزاد هاشم زاده

رابطه لاگرانژ

- مربوط به استخراج روابط دینامیکی سیستم های مکانیکی بر مبنای روابط انرژی است.
- به جای روابط برداری قانون دوم نیوتن، از روابط اسکالر انرژی استفاده می شود.
- برای سیستم های بدون تلفات: تابع لاگرانژ که به صورت اختلاف انرژی جنبشی منهای انرژی پتانسیل است، به صورت زیر تعریف می شود.

$$L = K - U$$

- برای هر کدام از درجات آزادی مستقل (مختصات تعمیم یافته) q_i ، رابطه لاگرانژی زیر اعمال می شود که F_{q_i} بیانگر نیروی خارجی تعمیم یافته در جهت q_i می باشد.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_{q_i}$$

درجات آزادی مستقل سیستم، بیان کننده شکل سیستم مکانیکی به صورت یکتا می باشند.

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز فرزاد هاشم زاده

رابطه لاگرانژ

اگر در سیستم تلفات داشته باشیم: معادله لاگرانژ به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=F_{q_i}$$

q_i مختصات تعمیم یافته

F_{q_i} نیروی خارجی تعمیم یافته در جهت q_i

U انرژی پتانسیل

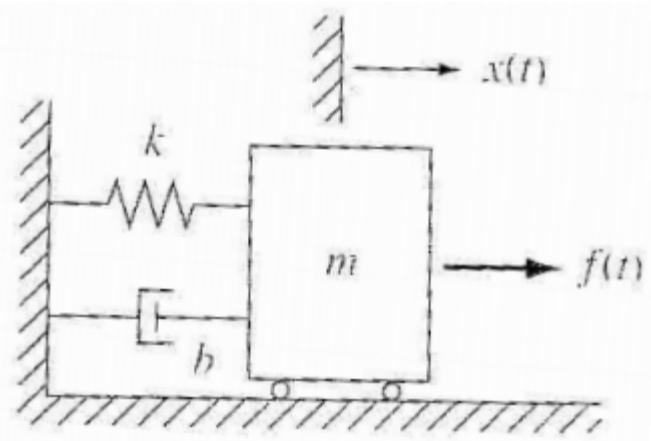
T انرژی جنبشی

R انرژی تلف شده

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز
فرزاد هاشم زاده

رابطه لاگرانژ

جرم- فنر- دمپر



$$U = \frac{1}{2}kx^2 \qquad R = \frac{1}{2}k\dot{x}^2 \qquad T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad F_{q_i} = f(t)$$

با جایگذاری در معادله لاگرانژ:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t)$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر فرزاد هاشم زاده دانشگاه تبریز

رابطه لاگرانژ

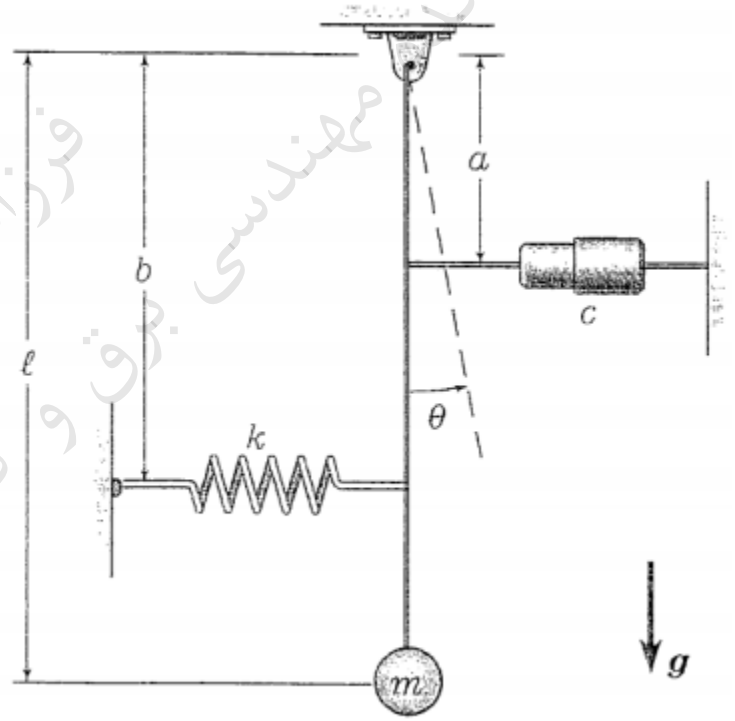
پاندول محدود شده

$$U = mgl - mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k(b\theta)^2$$

$$R = \frac{1}{2}c(a\dot{\theta})^2$$

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 \quad F_{q_i} = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + mgl\sin\theta + kb^2\theta = 0$$



با خطی سازی برای θ های کوچک:

$$ml^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + mgl\theta + kb^2\theta = 0$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر فرزاد هاشم زاده دانشگاه تبریز

رابطه لاگرانژ

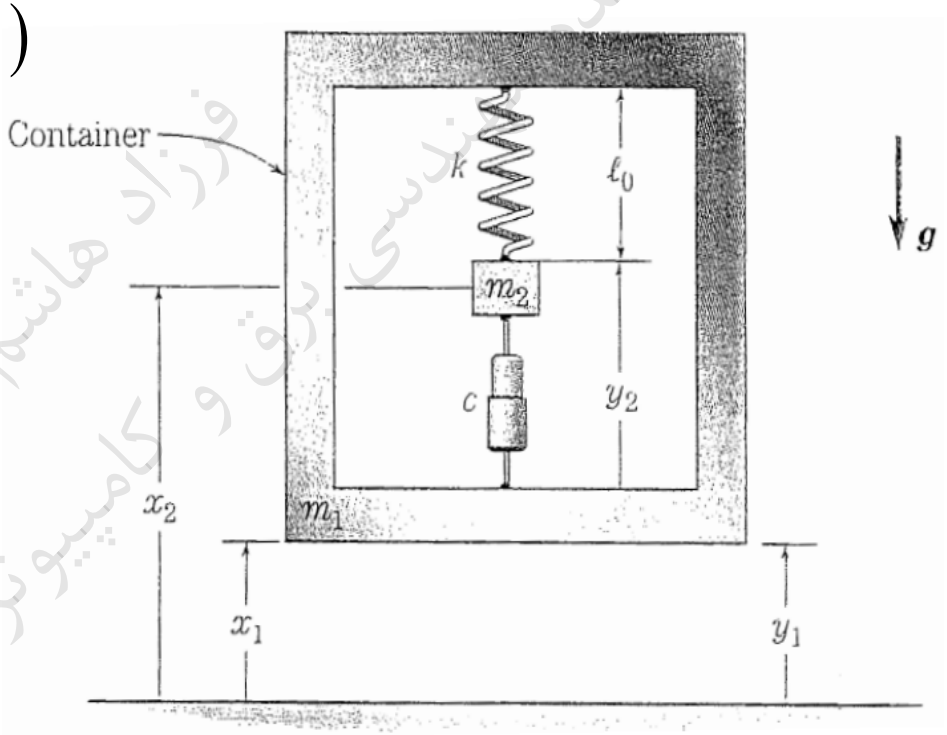
جرم- فنر- دمپر در حال سقوط

$$U = \frac{1}{2}ky_2^{\,2} + m_1 g y_1 + m_2 g(y_1 + y_2)$$

$$R = \frac{1}{2}c\dot{y}_2^{\,2}$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2(\dot{y}_1 + \dot{y}_2)^2$$

$$F_{y_1} = 0 \quad F_{y_2} = 0$$



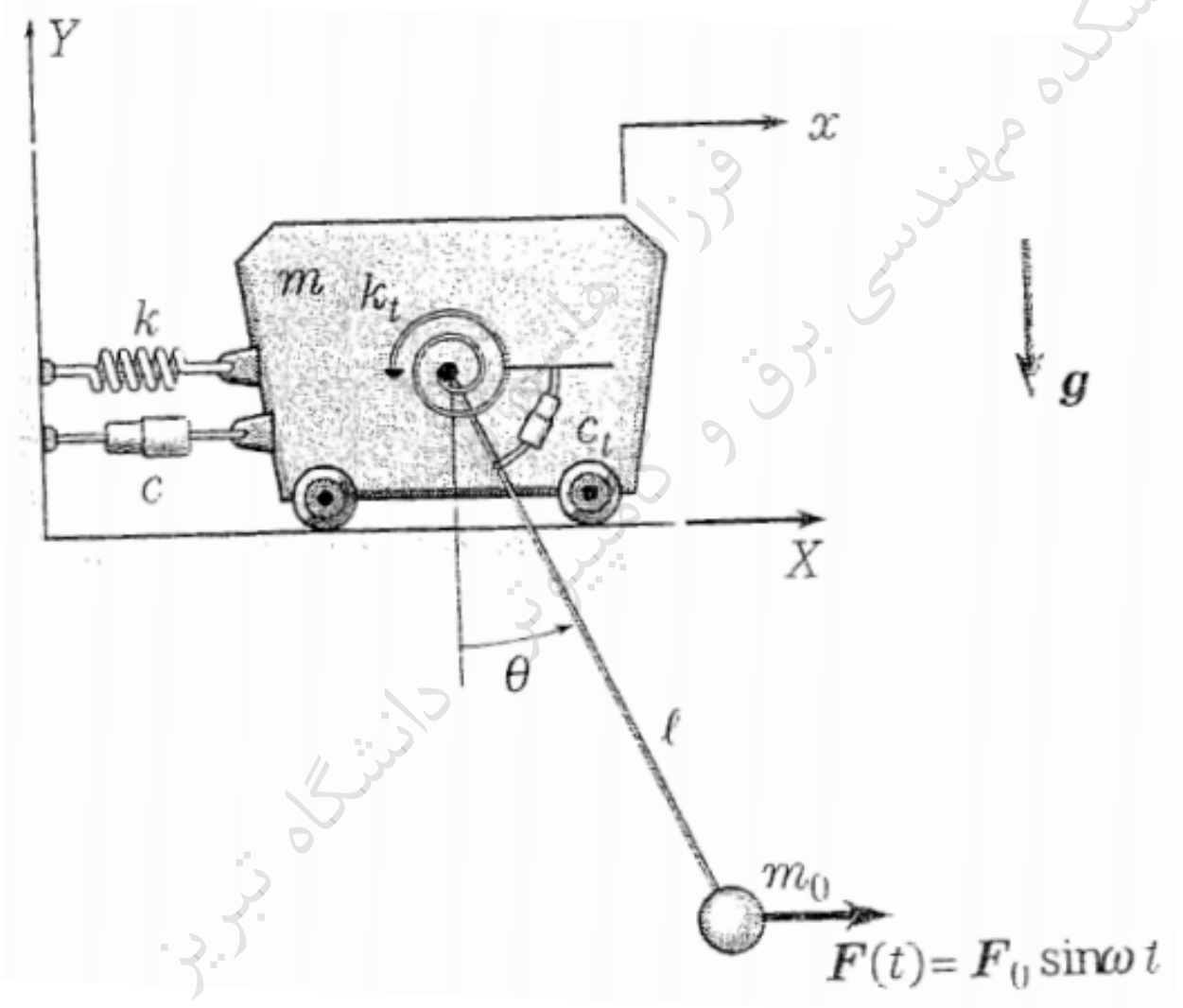
$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_1 g + m_2 g = 0$$

$$m_2\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + c\dot{y}_2 + ky_2 + m_2 g = 0$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر فرزاد هاشم زاده دانشگاه تبریز

رابطه لاگرانژ

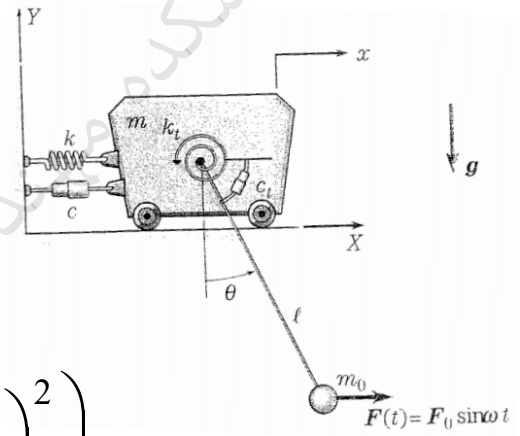
پاندول همراه با جرم-فنر-دمپر



دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز
فرزانه هاشمی

رابطه لاگرانژ

پاندول همراه با جرم-فنر-دمپر



$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k_t\theta^2 + m_0 gl(1-\cos\theta)$$

$$R = \frac{1}{2}c\dot{x}^2 + \frac{1}{2}c_t\dot{\theta}^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_0\left(\left(\frac{d}{dt}(x + l\sin\theta)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(l\cos\theta)\right)^2\right)$$

$$F_x = F_0 \sin\omega t$$

$$F_\theta = (F_0 \sin\omega t)l\cos\omega t$$

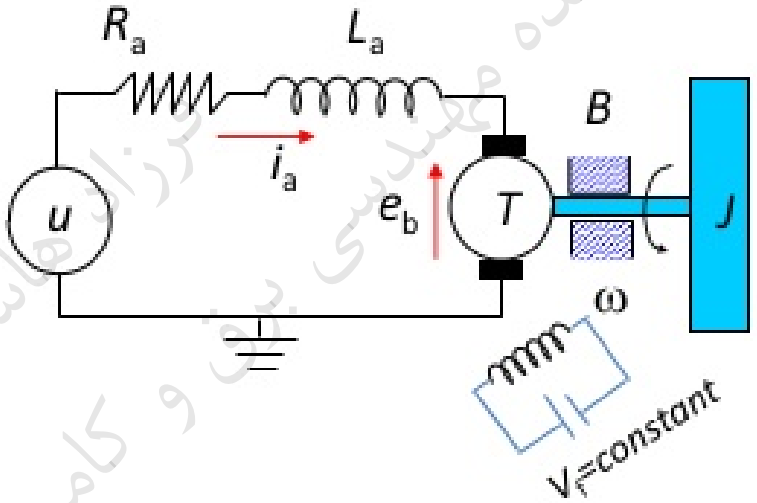
$$(m+m_0)\ddot{x} + c\dot{x} + kx + m_0 l(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = F_0\sin\omega t$$

$$m_0 l\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + k_t\theta + m_0 gl\sin\theta + m_0\ddot{x}l\cos\theta = (F_0\sin\omega t)l\cos\omega t$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر فرزاد هاشم زاده دانشگاه تبریز

موتور DC

موتور DC با کنترل آرمیچر:



ولتاژ u ورودی و سرعت زاویه ای ω خروجی می باشد.

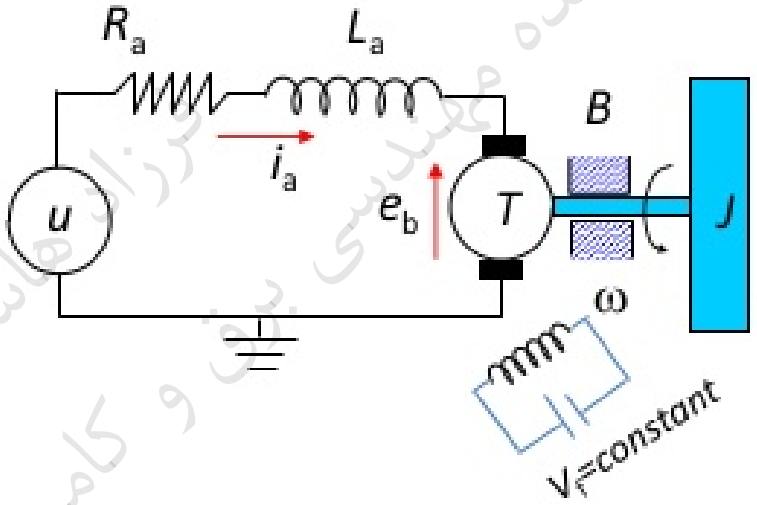
$$u = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b \qquad e_b : back\ emf\ voltage$$

$$T_{motor} = J\dot{\omega} + B\omega$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز

موتور DC

موتور DC با کنترل آرمیچر:



$$T_{motor} = K_t i_a \qquad e_b = K_b \omega$$

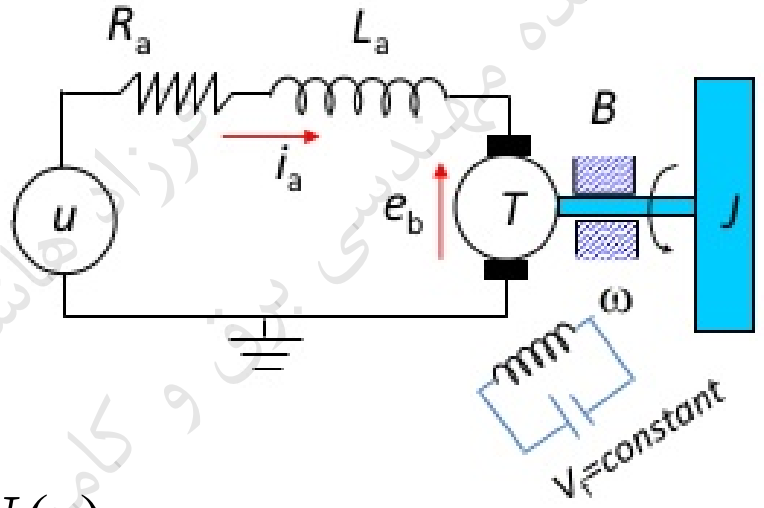
ثابت گشتاور Kt و ثابت ولتاژ Kb برای موتور های ایده آل برابرند.

$$\begin{cases} L_a \dfrac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_b \omega = u \\ J\dot{\omega} + B\omega - K_t i_a = 0 \end{cases}$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز

موتور DC

موتور DC با کنترل آرمیچر:



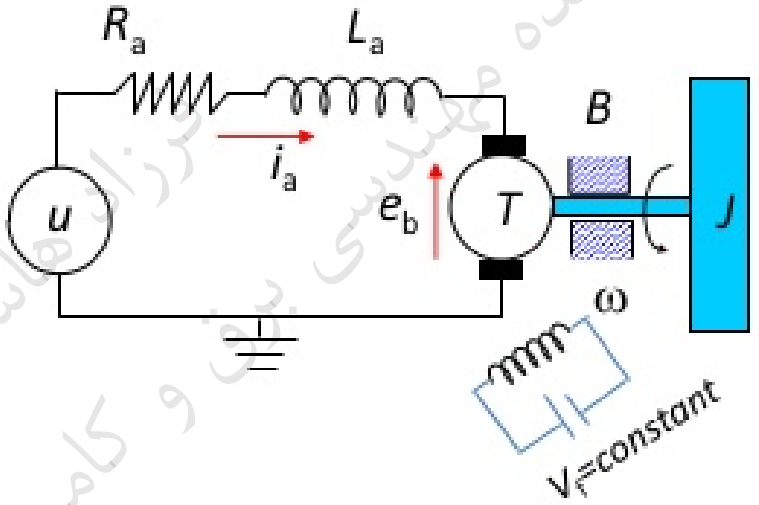
$$\begin{cases} (L_a s + R_a) I_a(s) + K_b \Omega(s) = U(s) \\ (Js + B)\Omega(s) - K_t I_a(s) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_t}{L_a J s^2 + (JR_a + BL_a)s + BR_a + K_t K_b}$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز

موتور DC

موتور DC با کنترل آرمیچر:



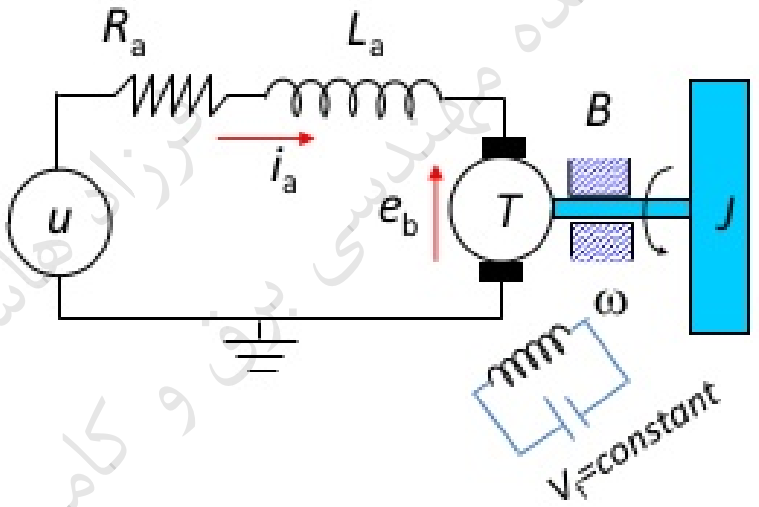
با توجه به اینکه La خیلی کوچک است، با صرفنظر کردن از آن مدل ساده مرتبه یک زیر به دست می آید.

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_t/R_a}{Js + \left(B + K_t K_b/R_a\right)}$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز

موتور DC

موتور DC با کنترل آرمیچر:



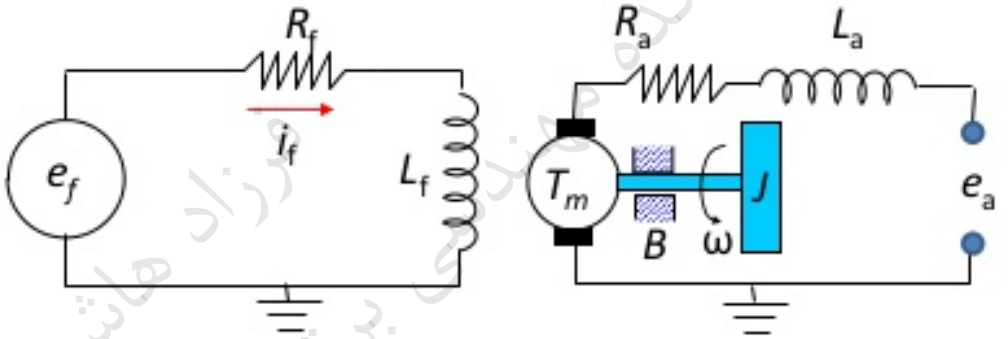
اگر خروجی جابجایی زاویه ای باشد.

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K_t/R_a}{s\left(Js + \left(B + K_t K_b/R_a\right)\right)}$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز

موتور DC

موتور DC با کنترل میدان:



$$e_f = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt}$$

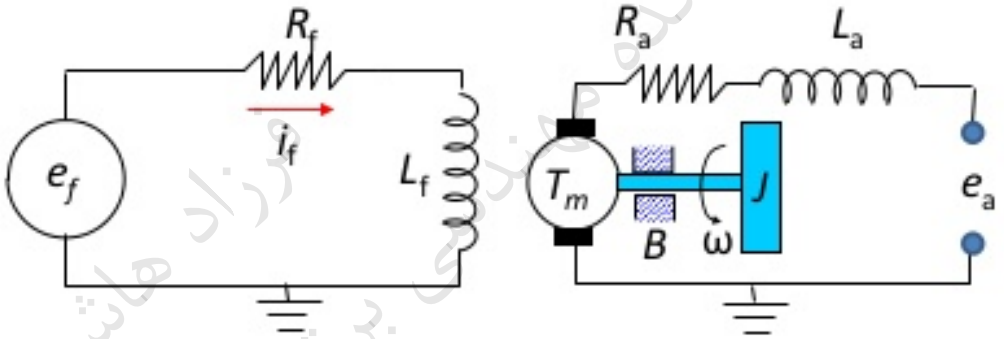
$$T_{motor} = J\dot{\omega} + B\omega$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز
فرزاد هاشم زاده

موتور DC

موتور DC با کنترل میدان:

$$T_{motor} = K_f i_f$$



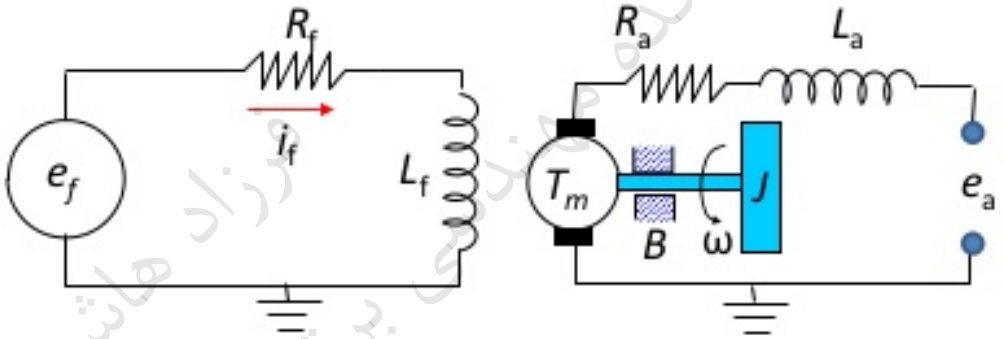
$$\begin{cases} E_f(s) = R_f I_f(s) + sL_f I_f(s) \\ Js\Omega(s) + B\Omega(s) = K_f I_f(s) \end{cases}$$

$$\frac{\Omega(s)}{E_f(s)} = \frac{K_f}{(Js+B)(L_f s + R_f)}$$

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه ... فرزاد هاشم زاده

موتور DC

موتور DC با کنترل میدان:



اگر خروجی جابجایی زاویه ای باشد.

$$\frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{K_f}{s(Js+B)(L_f s+R_f)}$$

که باز می توان از L_f صرفنظر کرده و مدل ساده تر مرتبه یک بدست آورد.

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر دانشگاه تبریز
فرزاد هاشم زاده