به نام خدا

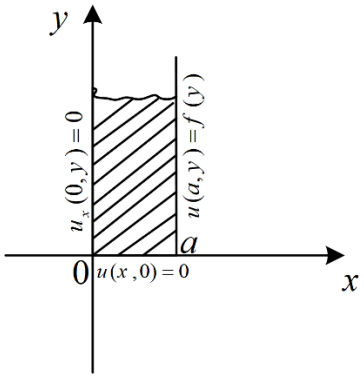
تمرینات سری پنجم درس ریاضیات مهندسی — معادلات با مشتقات جزئی

۱. جواب مساله مرزی زیر را پیدا کنید:

$$u_t = u_{xx} \quad t > 0\,, 0 < x < 2$$
$$u_x(0,t) = 0\,, u_x(2,t) = 0$$
$$u(x,0) = 4cos\pi x - 2cos3\pi x$$

۲. جواب عمومی معادله $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, (\alpha = \text{ثابت})$ را با $0 \le x \le \pi, t > 0$ و شرایط اولیه $y(x,0) = sin(x)$ و $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = cos(x)$ بیابید (انحراف تار مرتعش در همه زمان ها در دو انتها صفر است).

۳. جواب معادله لاپلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0\,;\ 0 < x < a\,, y > 0$ با شرایط مرزی داده شده در شکل زیر چگونه است؟



۴. در حل معادله لاپلاس بین دو استوانه هم مرکز به شعاع های ۲ و ۱۰، اگر مقدار جواب در استوانه خارجی ۲۰ باشد، مقدار جواب در استوانه داخلی چقدر باشد تا جواب در فاصله ۵ از محور استوانه ها عدد ۳۰ بماند؟

۵. با توجه به شرایط اولیه و مرزی بیان شده، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را حل نمایید:

$$\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} + sinx \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = \delta(t), \lim\limits_{x\to+\infty} u(x,t): \text{کراندار} \end{cases}$$

راهنمایی: می توانید از روش تبدیل لاپلاس استفاده کنید.

۶. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ناهمگن: در PDEهای خطی ناهمگن جواب کلی به صورت مجموع جواب خصوصی معادله ناهمگن ($v(x,t)$) و جواب معادله همگن ($w(x,t)$) می باشد:

$$u(x,t) = w(x,t) + v(x,t)$$

در حالت خاصی که تابع موجود در PDE به صورت حاصل ضرب تابعی از x و تابعی نمایی از t باشد، می توان جواب خصوصی به همان شکل در نظر گرفت.

با توضیحات فوق، PDE ناهمگن زیر را حل نمایید (به ارضای شرایط اولیه توسط جوابها دقت شود):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = xe^t \\ -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = sinx, u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

موفق باشید.