به نام خالق یکتا

تمرینات سری پنجم درس جبرخطی — فضاهای برداری

۱. فرض کنید $\mathbb{R}^+$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. عمل ضرب اسکالر نشان داده شده با علامت $\diamond$ را برای هر $x \in \mathbb{R}^+$ و هر عدد حقیقی α، به صورت زیر تعریف کنید:

$$\alpha \quad \diamond \quad x = x^{\alpha}$$

عمل جمع نشان داده شده با علامت $\oplus$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$x \quad \oplus \quad y = x \,.\, y \qquad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^+$$

بنابراین، برای این سیستم، حاصلضرب اسکالر -3 در $\frac{1}{2}$ برابر است با:

$$-3 \quad \diamond \quad \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

و مجموع 2 و 5 به صورت زیر داده می شود:

$$2 \quad \oplus \quad 5 = 2 \,.\, 5 = 10$$

آیا با تعاریف صورت گرفته، $\mathbb{R}^+$ یک فضای برداری خواهد بود؟ جواب خود را ثابت کنید.

۲. اثبات کنید که اگر S زیر فضایی از $\mathbb{R}^1$ باشد، در اینصورت $\mathrm{S} = \{0\}$ است و یا $\mathrm{S} = \mathbb{R}^1$ است.

۳. فرض کنید A ماتریسی $m \times n$ باشد. نشان دهید اگر $B_{m\times m}$ ماتریسی ناویژه باشد، آنگاه BA و A فضای پوچی یکسانی دارند.

۴. فرض کنید $C = AB$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

الف) نشان دهید که اگر بردارهای ستونی B و A مستقل خطی باشند، آنگاه باید بردارهای ستونی C مستقل خطی باشند.

ب) اگر بردارهای سطری B و A مستقل خطی باشند، آنگاه باید بردارهای سطری C مستقل خطی باشند. (راهنمایی: قسمت الف را بر روی C^T اعمال کنید.)

موفق باشید.